

# Paarungseffekte und Neutron-Proton-Oberflächendelta-Restwechselwirkung in sphärischen Kernen ungerader Massenzahl

H. BAIER

Physikinstitut, Reaktorzentrum Seibersdorf der Österreichischen Studiengesellschaft für Atomenergie

und E. REYA

Institut für Theoretische Physik, Universität Wien

(Z. Naturforsch. **24 a**, 319—325 [1969]; eingegangen am 15. November 1968)

Assuming a surface delta interaction (SDI) between identical as well as between non-identical nuclei, we investigate the pairing properties of spherical odd mass (s.o.m.) nuclei in the regions  $40 \leq Z \leq 49$ ,  $53 \leq N \leq 70$  and  $51 \leq Z \leq 59$ ,  $64 \leq N \leq 82$ . Applying Bogoliubov's transformation to the neutrons and protons separately and applying the compensation principle we arrive at the coupled system of BCS equations. Determining the quasi-particle energies and the chemical potentials of the neutron and proton system by numerical solution of these equations, we find rather impressive agreement between theory and experiment. We further find that for a SDI-model the incorporation of n-p forces seems to be both necessary and sufficient for a detailed understanding of the low-lying energy levels in the above mentioned regions. In addition, the SDI-model has the advantage of analytic simplicity as compared to more refined realistic (multiparameter) models.

Der Paarungsanteil der effektiven Restwechselwirkungen zwischen identischen Nukleonen im Kern war Gegenstand zahlreicher Untersuchungen<sup>1, 2</sup>. In allen diesen Arbeiten verwendet man die Methoden von BOGOLIUBOV und VALATIN<sup>3, 4</sup> zur Einführung der Paarungskorrelationen in die stationären Zustände des Kerns. Die dann noch zu berücksichtigenden Anteile der Restwechselwirkungen zwischen den Nukleonen müssen mit Hilfe anderer Methoden (z.B. Tamm-Dancoff- und „random phase“-Approximationen) untersucht werden. Leider ist es nicht möglich, den kurzreichweitigen Anteil der Neutron-Proton(n-p)-Restwechselwirkungen in ebenso eleganter und numerisch relativ einfacher Weise zu behandeln wie die Paarungskräfte zwischen identischen Nukleonen. Andererseits wäre eine detaillierte systematische Untersuchung dieser Kräfte sowohl im Bereich der leichten als auch in jenem der schweren Kerne von großem theoretischen Interesse<sup>5</sup>. In diesem Zusammenhang sei erwähnt, daß nicht einmal das oft gebrauchte Argument, die n-p-Restwechselwirkungen seien in schweren Kernen deshalb unwesentlich, weil die zur Wechselwirkung beitragenden Neutronen und Protonen nur schwach überlappende Zustände besetzen, ausreichend quantitativ untersucht worden ist. Die Bedeutung der n-p-Kräfte

für den Aufbau der leichten Kerne ( $A \leq 100$ ) ist zwar bekannt, aber bis jetzt nicht eingehend erörtert worden. Während jedoch im Falle identischer Teilchen die kurzreichweitigen Kraftanteile hauptsächlich die zu  $J=0$ ,  $T=1$  gekoppelten Teilchenpaare beeinflussen, gibt es im Falle der n-p-Restwechselwirkungen keine derartige Bevorzugung eines Zustandes gegenüber allen übrigen Zwei-Teilchen-Zuständen. Im letzteren Falle müßten also im Prinzip alle  $T=0$ ,  $J=1, 3, \dots, 2j$  und  $T=1$ ,  $J=0, 2, \dots, 2j-1$ -Zustände der Teilchenpaare gleichzeitig behandelt werden. Dennoch wurde in der Literatur der Versuch unternommen, wenigstens den  $T=1$ -Anteil der n-p-Kräfte mittels einer konsequenten Verallgemeinerung des Bogoliubov-Verfahrens zu berücksichtigen<sup>6</sup>. Während jedoch die numerische Auswertung dieses Programms noch auf sich warten läßt, scheint vorläufig folgendes Verfahren zweckmäßiger: Man wendet auf das n- bzw. p-System die üblichen Bogoliubov-Transformationen gesondert an und behandelt den in der Quasiteilchen-Darstellung nicht-diagonalen Anteil der n-p-Wechselwirkungen nach einer der vorhin bereits erwähnten Methoden (z.B.<sup>7</sup>).

Der erste Schritt dieses Verfahrens führt auf ein System gekoppelter BCS-Gleichungen zur Bestimmung der Quasiteilchenenergien und der chemischen

<sup>1</sup> K. BLEULER et al., Nuovo Cim. **52 B**, 45, 149 [1967].

<sup>2</sup> L. S. KISSLINGER u. R. A. SORESENSEN, Rev. Mod. Phys. **35**, 853 [1963].

<sup>3</sup> N. N. BOGOLIUBOV, Nuovo Cim. **1**, 794 [1958].

<sup>4</sup> J. G. VALATIN, Nuovo Cim. **1**, 843 [1958].

<sup>5</sup> A. M. LANE, Nuclear Theory, W. A. Benjamin Inc., New York 1964.

<sup>6</sup> P. CAMIZ et al., Nuovo Cim. **42**, 199 [1966].

<sup>7</sup> I. HAMAMOTO, Nucl. Phys. **86**, 208 [1966].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Potentiale des Neutronen- bzw. Protonen-Systems. Qualitativ wurde der Einfluß der kurzreichweitigen n-p-Kräfte auf die Spektren der sphärischen Kerne mit ungerader Massenzahl (s. o. m. Kerne) von SILVERBERG<sup>8</sup> untersucht. Die identischen Teilchen stehen dabei untereinander mittels der einfachen Paarungskraft, die nicht-identischen Teilchen durch eine  $\delta$ -Kraft in Wechselwirkung. Nach Lösung der (ungekoppelten) BCS-Gleichungen wird die  $\delta$ -Kraft in störungstheoretischer Näherung berücksichtigt. Die Haupttrends der Spektren der s. o. m. Kerne in der Nähe von halbmagischen Kernen konnten damit erklärt werden.

Eine Erweiterung dieser Behandlungsmethoden wurde von HAMAMOTO<sup>7</sup> vorgenommen. Die gekoppelten BCS-Gleichungen wurden für die einfache Paarungskraft numerisch gelöst und eine Konfigurationsmischungsrechnung im Quasiteilchenraum für eine spinabhängige n-p-Kraft durchgeführt. Ein detaillierter Vergleich mit dem Experiment konnte in dieser Arbeit nicht durchgeführt werden, da u. a. die wichtigen 3-Quasiteilchenanregungszustände in der Konfigurationsmischung vernachlässigt wurden.

In der vorliegenden Arbeit verwenden wir ein derartiges Verfahren und postulieren die Existenz effektiver,  $\delta$ -artiger, nur an der Kernoberfläche wirkender Kräfte sowohl zwischen identischen als auch zwischen nicht identischen Nukleonen<sup>9,10</sup> (SDI-Modell). Dabei wird die Wechselwirkung zwischen Neutronen und Protonen als spinabhängig angenommen. Sodann untersuchen wir die Lösungen des gekoppelten BCS-Gleichungssystems für sphärische, ungerade Kerne in den Bereichen

$$(I): \quad 40 \leq Z \leq 49, \quad 53 \leq N \leq 70;$$

$$(II): \quad 51 \leq Z \leq 59, \quad 64 \leq N \leq 82.$$

Phänomenologisch eingeführte Oberflächenkräfte wurden in anderen Bereichen der Isotopentabelle (und insbesondere für g-g-Kerne) mit großem Erfolg angewendet<sup>11,12</sup>. Abgesehen von den Paarungseigenschaften („energy-gap“, chemisches Potential, etc.) vermögen diese vielfach auch kollektive Charakteristika der Kernspektren wiederzuge-

ben<sup>13</sup>. Die Motivation für die Einführung derartiger effektiver Wechselwirkungen findet man z. B. in<sup>10,14</sup>; sie kann daher hier übergangen werden. Wir weisen darauf hin, daß für diese Restwechselwirkung die analytische Einfachheit und die niedere Anzahl an freien Parametern charakteristisch ist.

Die Resultate unserer Rechnungen zeigen den dominierenden Einfluß der n-p-Kräfte auf die Festlegung der niedrig liegenden Niveaus in den ungeraden Kernen des untersuchten Bereichs. Weiters zeigen sie die Brauchbarkeit des SDI-Modells für eine angenäherte Beschreibung der niedrigst liegenden Energieniveaus dieses Bereichs. Schließlich liefert dieses Modell ebensogute (und teilweise bessere) Resultate als andere durchwegs aufwendigere Modelle, die zur Beschreibung dieses Isotopenbereichs verwendet worden sind<sup>1,2</sup>.

Im folgenden geben wir zunächst einen Abriß der hier verwendeten Theorie. Danach diskutieren wir die erhaltenen Resultate und stellen sie, wie üblich, in Energietrend-Diagrammen bzw. in tabellarischer Form dar<sup>15</sup>.

### Theoretische Formulierung

Den Hamilton-Operator geben wir, wie üblich, in zweifach quantisierter Form an:

$$H = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha} + \sum_{\beta} \varepsilon_{\beta} b_{\beta}^{\dagger} b_{\beta} + H_{\text{int}}. \quad (1)$$

$a_{\alpha}^{\dagger}$ ,  $b_{\beta}^{\dagger}$  ( $a_{\alpha}$ ,  $b_{\beta}$ ) stellen die Erzeugungs-(Vernichtungs)Operatoren für Protonen (p) bzw. Neutronen (n) dar und  $\alpha$ ,  $\beta$  symbolisieren die Quantenzahlen der Schalenmodellzustände des p-, n-Systems (die Indizes  $a$ ,  $b$  sind analog definiert, enthalten aber keine magnetischen Quantenzahlen). Die Größen  $\varepsilon_a$ ,  $\varepsilon_b$  bedeuten die Einzelteilchenenergien der Protonen bzw. Neutronen im Schalenmodell.  $H_{\text{int}}$  beschreibt die Restwechselwirkungen zwischen den Nukleonen. Im einzelnen machen wir darüber folgende Annahmen: zwischen identischen Nukleonen wirke eine Oberflächenkraft der folgenden Form<sup>9</sup>

$$V_i = -4\pi g_i (u_0^2 r_0)^{-2} \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \delta(x_2 - r_0), \quad (2)$$

<sup>8</sup> L. SILVERBERG, Nucl. Phys. **60**, 483 [1964].

<sup>9</sup> I. M. GREEN u. S. A. MOSZKOWSKI, Phys. Rev. **139**, B 790 [1965].

<sup>10</sup> A. FAESSLER u. A. PLASTINO, Nuovo Cim. **47 B**, 297 [1967].

<sup>11</sup> A. PLASTINO, R. ARVIEN u. S. A. MOSZKOWSKI, Phys. Rev. **145**, 837 [1966].

<sup>12</sup> A. PLASTINO, A. FAESSLER u. S. A. MOSZKOWSKI, Bull. Am. Phys. Soc. **11**, 320 [1966].

<sup>13</sup> A. FAESSLER u. A. PLASTINO, Phys. Rev. **156**, 1072 [1967].

<sup>14</sup> A. FAESSLER, IAEA-Paper SMR 3/16 [1966] (unveröffentlicht).

<sup>15</sup> Eine kurze Zusammenfassung vorläufiger Ergebnisse findet sich in E. REYA u. H. BAIER, Nuovo Cim. [1968], im Druck.

$i$  = n, p;  
 $g_i$  Kopplungskonstante;  
 $r_0$  Kernradius;  
 $u_0$  Radialwellenfunktion an der Kernoberfläche  
 (konstant angenommen).

Weiters postulieren wir als Restwechselwirkung zwischen Neutronen und Protonen eine spinabhängige, ebenfalls nur an der Kernoberfläche wirkende Kraft der Form

$$V_{\text{np}} = -4 \pi (u_0^2 r_0)^{-2} \{g_{\text{np}} + g_{\text{np}}^\sigma (\mathbf{s}_\text{n} \cdot \mathbf{s}_\text{p})\} \delta(\mathbf{x}_\text{n} - \mathbf{x}_\text{p}) \delta(x_\text{n} - r_0). \quad (3)$$

$\sigma_n = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)_n$  stellt den Spinvektor des Neutrons dar. Die  $\sigma_i$  sind die Paulischen Spinmatrizen (analog für den Proton-Spinvektor  $\sigma_p$ ). Zur angenäherten Diagonalisierung des Hamilton-Operators unterwirft man nun sowohl die Operatoren des n- als auch jene des p-Systems einer Bogoliubov-Valatin-Transformation<sup>3, 4</sup>. Die Koeffizienten dieser Transformation ergeben sich z. B. aus dem Bogoliubovschen Kompensationsprinzip. Da der nach diesem Verfahren entstehende Hamilton-Operator nicht mehr mit dem Operator der Teilchenzahl kommutiert, verwendet man, um die Teilchenzahlerhaltung im Mittel zu gewährleisten, an Stelle von (1) den folgenden Operator

$$\mathcal{S} = H - \lambda_p n_p - \lambda_n n_n,$$

( $n_p, n_n \dots$  Operatoren der Proton- bzw. Neutronenzahl).  $\lambda_p$  ( $\lambda_n$ ) ist so zu bestimmen, daß die mittlere Protonen-(Neutronen-)Zahl im Kern-Grundzustand der vorgegebenen Proton-(Neutron-)Zahl gleich wird. Zahlreiche Verfahren wurden entwickelt, um die Teilchenzahlschwankungen um den Mittelwert zu unterdrücken<sup>16</sup>. Wir beschränken uns jedoch hier auf die Untersuchung des Operators  $\mathfrak{S}$ .

In unserem Falle erhalten wir<sup>17</sup> folgendes Gleichungssystem zur Bestimmung der gap-Parameter  $\Delta_a, \Delta_b$  und chemischen Potentiale  $\lambda_p, \lambda_n$

$$\begin{aligned} \Delta_{a'} &= (2\hat{j}_{a'})^{-1} \sum_a \hat{j}_a \frac{\Delta_a \cdot \Theta(a' a' a a 0)}{[(\tilde{\varepsilon} a - \frac{1}{4} \mu_a^{n-p} - \lambda_p)^2 + \Delta_a^2]^{\frac{1}{2}}}, \\ N_p &= \frac{1}{2} \sum_a \hat{j}_a^2 \left( 1 - \frac{\tilde{\varepsilon} a - \frac{1}{4} \mu_a^{n-p} - \lambda_p}{[(\tilde{\varepsilon} a - \frac{1}{4} \mu_a^{n-p} - \lambda_p)^2 + \Delta_a^2]^{\frac{1}{2}}} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Analoge Gleichungen gelten für das n-System mit  $\alpha \rightarrow \beta$ ,  $a \rightarrow b$ ,  $N_p \rightarrow N_n$  und  $n \longleftrightarrow p$ .

Weiters gilt

 $N_p \dots$  Protonenanzahl,

$$\begin{aligned} \hat{j}_a &= (2j_a + 1)^{\frac{1}{2}} (j_a \dots \text{Drehimpuls des Zustandes } a), \\ \tilde{\varepsilon}_a &= \varepsilon_a - \mu_a^{p-p} \text{ (renormierte Einzelteilchenenergien),} \\ \mu_a^{p-p} &= 2 \hat{j}_a^{-1} \sum_{a'} \hat{j}_{a'} v_{a'}^2 \cdot A(a \ a \ a' \ a' \ 0) \\ &\quad \text{(p-p Selbstenergien),} \\ \mu_a^{n-p} &= 2 \hat{j}_a^{-1} \sum_b j_b v_b^2 \eta(a \ a \ b \ b \ 0) \\ &\quad \text{(n-p Selbstenergien),} \\ v_b^2 &\dots \text{Besetzungswahrscheinlichkeit des Niveaus } b. \end{aligned}$$

Die Größen  $\Theta$ ,  $\mathcal{A}$  und  $\eta$  hängen in komplizierter Weise von der Geometrie des Systems ab. Ihre detaillierte Form findet sich in <sup>17</sup>. Wir erwähnen, daß unsere Schreibweise mit der in der Literatur üblichen übereinstimmt <sup>18</sup>. Die Quasiteilchenenergien ergeben sich aus der Lösung des Gleichungssystems (4) mittels des folgenden Ausdruckes

$$E_a = [(\tilde{\varepsilon}_a - \frac{1}{4} \mu_a^{n-p} - \lambda_p)^2 + \Delta_a^2]^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

und analog für die Quasiteilchenenergien  $E_b$  des Neutronensystems. Die Werte der renormierten Einzelteilchenenergien  $\tilde{\epsilon}_a$ ,  $\tilde{\epsilon}_b$  sind entweder aus experimentellen Daten oder aus Schalenmodellrechnungen mit realistischen Potentialen entnehmbar<sup>1</sup>. Bisweilen werden sie als innerhalb gewisser Grenzen frei wählbare Parameter bezeichnet. Die Kopplung zwischen den Neutronen und Protonen des Kerns steckt in der verwendeten Näherung in den Größen  $\mu_a^{n-p}$  und  $\mu_b^{p-n}$ . Da  $\mu_a^{n-p} \sim \sum_b \langle a b | V_{np} | a b \rangle$ , entspricht diese Größe etwa dem folgenden Feynman-Graphen

$$\mu_a^{n-p} \sim \begin{array}{c|c} & a \\ \hline \text{---} & \bigcirc b \\ & a \end{array}. \quad (6)$$

Die Berücksichtigung dieser Kopplungsglieder erweist sich als wesentlich für das Verständnis der Spektren in den hier betrachteten Bereichen.

## Diskussion der erhaltenen Resultate

Die numerischen Lösungen des fundamentalen Systems (4) wurden mit Hilfe eines rasch konvergierenden Iterationsverfahrens gewonnen. (Eine detaillierte Darstellung des Lösungsverfahrens findet

<sup>16</sup> Y. NOGAMI, Phys. Rev. **134**, 313 [1964].

<sup>17</sup> E. REYA, Dissertation, Universität Wien 1968, und Bericht der Österr. Studiengesellschaft für Atomenergie, Seibersdorf (SGAE-PH-77/1968).

<sup>18</sup> M. BARANGER, Phys. Rev. **120**, 957 [1960].

sich in <sup>17</sup>.) Die erhaltenen Werte für die „gap“-Parameter  $\tilde{A}_a \equiv (-)^{l_a} A_a$  und  $\tilde{A}_b \equiv (-)^{l_b} A_b$  und die chemischen Potentiale  $\lambda_p, \lambda_n$  führen gemäß Gl. (5) auf die Quasiteilchenenergien. Daraus folgen unmittelbar die Separationsenergien für Protonen und Neutronen.

Die Kopplungskonstanten  $g_p, g_n$  und  $g_{np}$  wurden so gewählt, daß eine möglichst gute Übereinstimmung zwischen experimentellen und theoretischen Aussagen in den untersuchten Massenzahlbereichen erzielt werden konnte:

$$(I): \quad g_p = 0,248; \quad g_n = 0,230; \quad g_{np} = 0,010;$$

$$(II): \quad g_p = g_n = 0,176; \quad g_{np} = 0,008.$$

(Werte in MeV). Weiters gilt gemäß <sup>19</sup>:

$$\frac{g_{np} + g_{np}^\sigma}{g_{np} - 3 g_{np}^\sigma} = 1,5.$$

Diese Werte für  $g_p$  und  $g_n$  entsprechen somit größenordnungsmäßig den für reine Paarungskraftansätze gefundenen Parameterwerten. Die Zahlenwerte der in Gl. (4) auftretenden renormierten Einzelteilchenenergien  $\tilde{\epsilon}_a, \tilde{\epsilon}_b$  für die in unseren Rechnungen berücksichtigten Zustände sind in Tab. 1 zusammengefaßt. Diese Werte entstammen der Arbeit <sup>1</sup>. Um unsere Resultate in übersichtlicher Form darzustellen, schließen wir uns den Überlegungen von <sup>1</sup> an und betrachten eine ausgewählte Folge stabiler Kerne, für die (wenn nicht anders angegeben) alle weiteren Überlegungen durchgeführt wurden:

$$(Z, N) = (0, 0) - (10, 11) - (20, 23) - (30, 37) \\ - (40, 52) - (50, 68) - (60, 85) - (70, 102) \\ - (80, 120) - (90, 138) - (100, 156).$$

Die folgenden Diagramme geben die errechneten niedrig liegenden Energieniveaus bzw. mittleren Separationsenergien verschiedener Isotope als Funktion der Neutronen- oder Protonenanzahl in den Bereichen (I) und (II) an. Die mittleren Separationsenergien sind folgendermaßen definiert:

tionsenergien sind folgendermaßen definiert:

$$B_{\pm p}^J(Z, N) \equiv \frac{1}{2} [B(Z+1, N) - B(Z-1, N)],$$

[ $B(Z, N)$  ... totale Kernbindungsenergie]. Die Separationsenergien der durch die totalen Drehimpulse  $J$  und die Parität ( $\pm$ ) gekennzeichneten Anregungszustände der Kerne sind gegeben durch

$$B_p^{J\pm}(Z, N) \equiv B^{J\pm}(Z, N) - B(Z-1, N), \\ (Z \text{ ungerade, } N \text{ gerade})$$

wobei die Anregungsenergien in  $B^{J\pm}$  enthalten sind.

Die Abb. 1 stellt die von uns erhaltenen Protonenseparationsenergien im Bereich  $41 \leq Z \leq 59$  für Kerne ungerader Protonenzahl dar. Dasselbe Diagramm enthält die Lösungen des ungekoppelten Systems [dieses entsteht aus (4), wenn man  $\mu_a^{n-p} = \mu_b^{p-n} = 0$  setzt]. Die Bedeutung des Kopplungstermes in (4) für eine befriedigende Erklärung des experimentell gefundenen Trends ist aus der Zeichnung deutlich ersichtlich. Weiters zeigt Abb. 1 die Resultate von BLEULER et al.<sup>1</sup> für denselben Isotopenbereich.

Im Gegensatz zu unserer einfachen Modellrestwechselwirkung verwenden diese Autoren eine realistische mehrparametrische effektive Wechselwirkung zwischen identischen Nukleonen; n-p-Kräfte werden nicht berücksichtigt. Man erkennt, daß in diesem Fall beide Theorien in guter Übereinstimmung mit dem Experiment stehen, obwohl die Oberflächen  $\delta$ -Kraft die analytisch einfachere Form und eine wesentlich geringere Anzahl frei wählbarer Parameter besitzt. Allerdings ist der durch die vorliegenden Berechnungen bearbeitete Kernbereich enger als der in <sup>1</sup> untersuchte. Ähnlich gute Resultate erhalten wir <sup>17</sup> für die Kerne ungerader Neutronenzahl in den Bereichen  $53 \leq N \leq 63$  und  $65 \leq N \leq 81$ . Für die Kerne ungerader Protonenzahl des Bereiches  $51 \leq Z \leq 59$  finden wir größere Abweichungen zwischen Theorie und Experiment in der Nähe der magischen Zahl  $Z = 50$ .

|      |                        | 2 p <sub>1/2</sub> | 2 p <sub>3/2</sub> | 1 f <sub>5/2</sub> | 1 g <sub>9/2</sub> | 3 s <sub>1/2</sub> | 2 d <sub>3/2</sub> | 2 d <sub>5/2</sub> | 1 g <sub>7/2</sub> | 1 h <sub>11/2</sub> |
|------|------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|---------------------|
| (I)  | — $\tilde{\epsilon}_a$ | 9,48               | 11,60              | 11,40              | 8,45               | —                  | 1,43               | 2,76               | 0,34               | —                   |
|      | — $\tilde{\epsilon}_b$ | 15,02              | 16,84              | 16,33              | 12,68              | 6,20               | 5,03               | 8,09               | 5,53               | 3,84                |
| (II) | — $\tilde{\epsilon}_a$ | 12,37              | 14,10              | 14,80              | 11,78              | 3,19               | 2,65               | 5,84               | 5,00               | 3,78                |
|      | — $\tilde{\epsilon}_b$ | 18,86              | 20,30              | 20,70              | 16,74              | 9,98               | 9,40               | 12,05              | 11,10              | 8,70                |

Tab. 1. Neutron-, Proton-Einzelteilchenenergien ( $\tilde{\epsilon}_a, \tilde{\epsilon}_b$  in MeV).

<sup>19</sup> H. NOYA et al., Progr. Theor. Phys. Suppl. **8**, 47 [1958].



Die Abb. 2 zeigt den Einfluß der n-p-Wechselwirkung auf die niedrig liegenden Niveaus der ungeraden Ag-Isotope. Die Lösungen der ungekoppelten Gleichungen liegen völlig falsch. Die Berücksichtigung der n-p-Kopplung jedoch erzeugt die experimentell gefundenen Grundzustände. Wir vergleichen in diesen Diagrammen unsere Resultate mit jenen, die KISSLINGER und SORESENSEN<sup>2</sup> (KS) unter Verwendung einer kurzreichweitigen Paarungskraft zwischen identischen, und einer langreichweitigen Quadrupolkraft zwischen beliebigen Nukleonenpaaren erhalten haben. Ähnlich signifikante Resultate erhält man für den Fall der In-Isotope (Abb. 3).

Im Bereich (II) konten wir im Falle der leichten Sb-, J- und Pr-Isotope und ebenso für Cs<sup>131</sup>, La<sup>135</sup> das 5<sup>+</sup>/2-Niveau richtig als Grundzustand erhalten. Es war im Rahmen dieses Modells jedoch nicht möglich, die Variation des 1<sup>+</sup>/2-Zustandes [der (exp.) für Cs<sup>129</sup> sogar zum Grundzustand wird] als Funktion der geraden n-Zahl exakt wiederzugeben. Es gibt gute Gründe, um diesem Zustand Phononcharakter zuzuschreiben. Die Behandlung derartiger Zustände liegt außerhalb des Rahmens dieser Arbeit und soll daher hier nicht weiter diskutiert werden.

Für die Isotope mit ungerader Neutronzahl aus dem Bereich  $53 \leq N \leq 63$  konnten für Zr<sup>93</sup><sub>53</sub> und Zr<sup>95</sup><sub>53</sub> das 5<sup>+</sup>/2-Niveau richtig als Grundzustand erklärt werden. Als erste Anregungszustände treten 1<sup>+</sup>/2-Niveaus auf. Für die experimentell noch wenig untersuchten Isotope Zr<sup>97</sup> und Zr<sup>99</sup> ergeben sich theoretisch 1<sup>+</sup>/2-Grundzustände. Abb. 4 zeigt die niedrig liegenden Energieniveaus für Mo- und Ru-Isotope mit ungerader Massenzahl. Während, wie aus dieser Abbildung ersichtlich, für die Mo- und Ru<sup>97, 99</sup>-Isotope die niedrig liegenden Niveaus in Übereinstimmung mit den experimentellen Daten gefunden wurden, war es bei Ru<sup>101, 103</sup> nicht möglich, die experimentell geforderten 5<sup>+</sup>/2-Grundzustände zu erhalten. Ähnlich war es im Falle der ungeraden Pd-Isotope. Man würde annehmen, daß in den letztgenannten Isotopen die niedrig liegenden Zustände starke Phononbeimischungen enthalten. Solche Vorstellungen sind in unseren Rechnungen nicht berücksichtigt worden. Es sei jedoch erwähnt, daß KS, die in ihrer Arbeit<sup>2</sup> dem Phononcharakter Rechnung trugen, aber die kurzreichweitigen n-p-Kräfte vernachlässigten, hier ebenfalls nicht imstande waren, die experimentelle Niveaufolge richtig wiederzugeben. Ihre Resultate sind ebenfalls aus Abb. 4

ersichtlich. Die dominierende Rolle der kurzreichweitigen n-p-Wechselwirkungen zeigte sich besonders deutlich im Bereich  $65 \leq N \leq 81$  für Kerne mit ungerader Neutronenzahl. Die Protonen füllen hier die 2d<sub>5/2</sub>- und 1g<sub>7/2</sub>-Zustände auf, während die Neutronen 3s<sub>1/2</sub>-, 2d<sub>3/2</sub>- und 1h<sub>11/2</sub>-Zustände besetzen. Abb. 5 bringt die niedrig liegenden Zustände der Te-Isotope. Hier zeigt sich, daß die Lösung des ungekoppelten BCS-Gleichungssystems bereits für das Te<sup>125</sup>-Isotop einen 3<sup>+</sup>/2-Grundzustand ergibt, während man experimentell hier, ebenso wie bei den Te-Isotopen kleinerer Massenzahl, einen 1<sup>+</sup>/2-Grundzustand findet. Erst die Berücksichtigung von n-p-Wechselwirkungen im Rahmen des SDI-Modells gibt im Gegensatz dazu die experimentell beobachteten relativen Lagen dieser beiden Niveaus richtig wieder. Die Abb. 6 und 7 zeigen, daß auch die niedrig

| Element                           | Zustand             | $E_a$<br>(MeV) | $A_a$<br>(MeV) | $\mu_a^{n-p}$<br>(MeV) | $v_a^2$ | $\lambda_p$<br>(MeV) |
|-----------------------------------|---------------------|----------------|----------------|------------------------|---------|----------------------|
| 41Nb <sup>95</sup> <sub>54</sub>  | 2 p <sub>3/2</sub>  | 2,36           | -0,97          | 0,89                   | 0,96    | -9,66                |
|                                   | 1 f <sub>5/2</sub>  | 2,45           | -1,35          | 1,24                   | 0,92    |                      |
|                                   | 2 p <sub>1/2</sub>  | 0,57           | -0,57          | 0,52                   | 0,45    |                      |
|                                   | 1 g <sub>9/2</sub>  | 1,82           | 1,61           | 1,48                   | 0,27    |                      |
| 43Tc <sup>99</sup> <sub>56</sub>  | 2 p <sub>3/2</sub>  | 2,76           | -0,93          | 0,96                   | 0,97    | -9,23                |
|                                   | 1 f <sub>5/2</sub>  | 2,82           | -1,30          | 1,34                   | 0,94    |                      |
|                                   | 2 p <sub>1/2</sub>  | 0,66           | -0,54          | 0,56                   | 0,79    |                      |
|                                   | 1 g <sub>9/2</sub>  | 1,60           | 1,55           | 1,60                   | 0,38    |                      |
| 45Rh <sup>103</sup> <sub>58</sub> | 2 p <sub>3/2</sub>  | 3,22           | -0,90          | 1,02                   | 0,98    | -8,76                |
|                                   | 1 f <sub>5/2</sub>  | 3,25           | -1,27          | 1,44                   | 0,96    |                      |
|                                   | 2 p <sub>1/2</sub>  | 1,01           | -0,53          | 0,60                   | 0,92    |                      |
|                                   | 1 g <sub>9/2</sub>  | 1,52           | 1,51           | 1,71                   | 0,54    |                      |
| 47Ag <sup>111</sup> <sub>64</sub> | 2 p <sub>3/2</sub>  | 3,65           | -0,78          | 1,23                   | 0,99    | -8,34                |
|                                   | 1 f <sub>5/2</sub>  | 3,66           | -1,09          | 1,72                   | 0,98    |                      |
|                                   | 2 p <sub>1/2</sub>  | 1,39           | -0,46          | 0,72                   | 0,97    |                      |
|                                   | 1 g <sub>9/2</sub>  | 1,45           | 1,30           | 2,05                   | 0,71    |                      |
| 49In <sup>113</sup> <sub>64</sub> | 2 p <sub>3/2</sub>  | 4,11           | -0,50          | 1,23                   | 1,00    | -7,83                |
|                                   | 1 f <sub>5/2</sub>  | 4,06           | -0,70          | 1,72                   | 0,99    |                      |
|                                   | 2 p <sub>1/2</sub>  | 1,86           | -0,29          | 0,72                   | 0,99    |                      |
|                                   | 1 g <sub>9/2</sub>  | 1,41           | 0,83           | 2,05                   | 0,90    |                      |
| 51Sb <sup>119</sup> <sub>68</sub> | 2 d <sub>5/2</sub>  | 1,42           | 0,71           | 1,53                   | 0,07    | -7,45                |
|                                   | 1 g <sub>7/2</sub>  | 2,16           | 0,91           | 1,97                   | 0,05    |                      |
|                                   | 1 h <sub>11/2</sub> | 3,28           | -1,03          | 2,24                   | 0,02    |                      |
|                                   | 3 s <sub>1/2</sub>  | 4,11           | 0,30           | 0,64                   | 0,00    |                      |
|                                   | 2 d <sub>3/2</sub>  | 4,56           | 0,50           | 1,09                   | 0,00    |                      |
| 53J <sup>125</sup> <sub>72</sub>  | 2 d <sub>5/2</sub>  | 1,41           | 1,13           | 1,68                   | 0,20    | -7,11                |
|                                   | 1 g <sub>7/2</sub>  | 2,14           | 1,45           | 2,16                   | 0,13    |                      |
|                                   | 1 h <sub>11/2</sub> | 3,18           | -1,66          | 2,47                   | 0,07    |                      |
|                                   | 3 s <sub>1/2</sub>  | 3,77           | 0,47           | 0,70                   | 0,00    |                      |
|                                   | 2 d <sub>3/2</sub>  | 4,23           | 0,87           | 1,20                   | 0,01    |                      |
| 55Cs <sup>131</sup> <sub>76</sub> | 2 d <sub>5/2</sub>  | 1,44           | 1,36           | 1,84                   | 0,33    | -6,78                |
|                                   | 1 g <sub>7/2</sub>  | 2,12           | 1,75           | 2,36                   | 0,22    |                      |
|                                   | 1 h <sub>11/2</sub> | 3,07           | -1,99          | 2,69                   | 0,12    |                      |
|                                   | 3 s <sub>1/2</sub>  | 3,45           | 0,57           | 0,77                   | 0,01    |                      |
|                                   | 2 d <sub>3/2</sub>  | 3,93           | 0,97           | 1,31                   | 0,01    |                      |

Tab. 2. Lösungen der gekoppelten BCS-Gleichungen für ungerade p-Kerne.

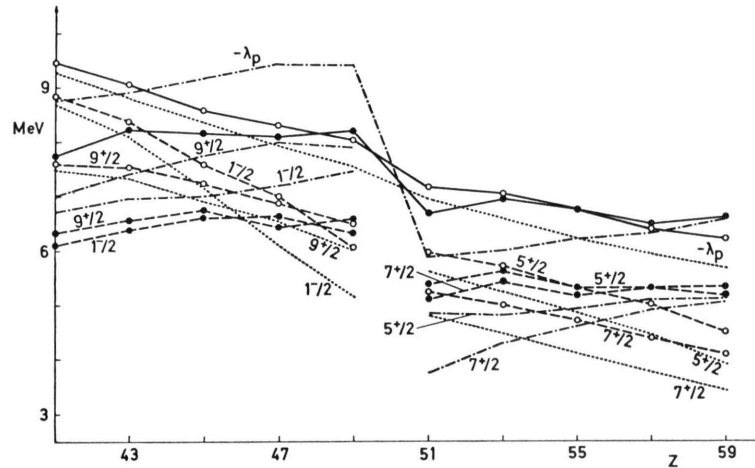


Abb. 1. Proton-Separationsenergien: ● exp. Werte: —  $B_p$ , —  $B_p'$ ; ○ theoret. Werte: —  $(-\lambda_p)$ , —  $-e_a = -(\lambda_p + E_a)$ ; ..... Lösungen der ungekoppelten BCS-Gleichungen; — Ergebnisse aus 1.

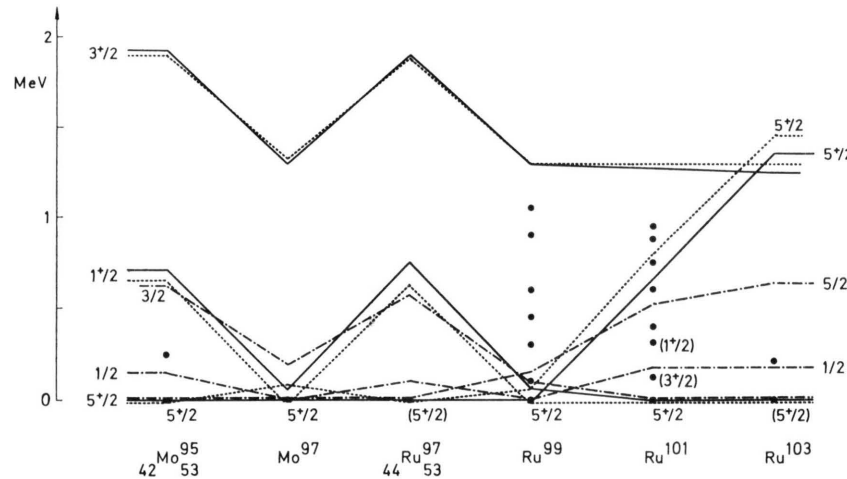


Abb. 4. Energieniveaus von ungeraden Mo- und Ru-Isotopen; Zeichenerklärung wie in Abb. 2.

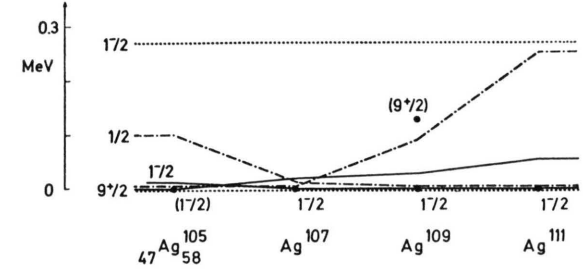


Abb. 2. Relative Lage der  $\frac{1}{2}^-$  und  $\frac{9}{2}^+$ -Quasiproton-Energieniveaus in ungeraden Ag-Kernen: ● experimentelle Werte; — (.....) Lösungen der gekoppelten (ungekoppelten) BCS-Gleichungen; — Ergebnisse von KS<sup>2</sup>.

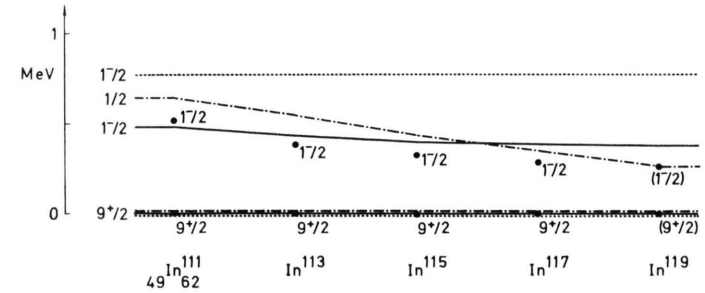


Abb. 3. Relative Lage der  $\frac{1}{2}^-$  und  $\frac{9}{2}^+$ -Quasiteilchen-Energieniveaus in ungeraden In-Isotopen; Zeichenerklärung wie in Abb. 2.

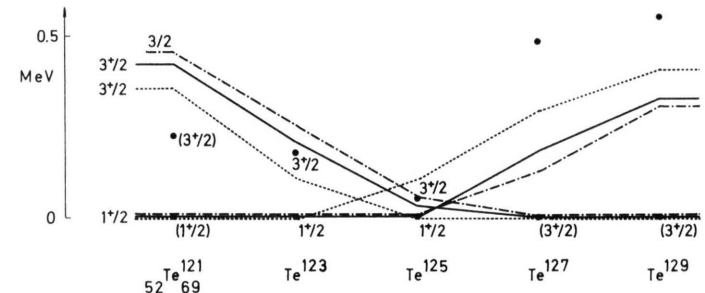


Abb. 5. Relative Lage der  $\frac{1}{2}^-$  und  $\frac{3}{2}^+$ -Quasineutron-Energieniveaus in ungeraden Te-Isotopen; Zeichenerklärung wie in Abb. 2.

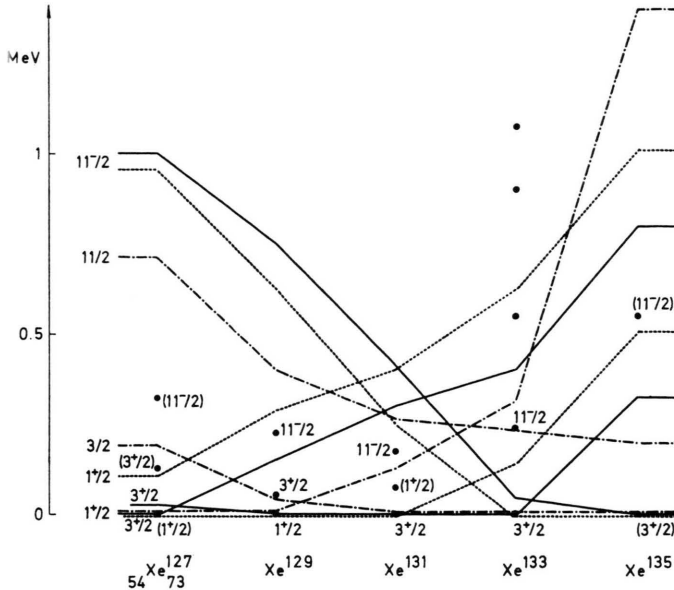


Abb. 6. Energieniveaus von ungeraden Xe-Isotopen; Zeichenerklärung wie in Abb. 2.

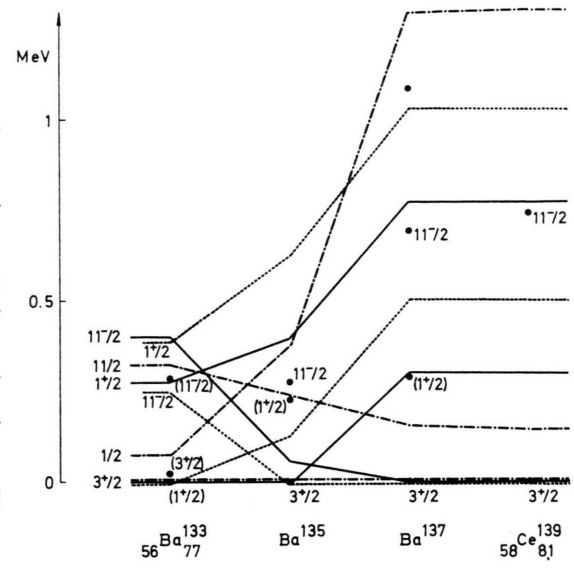


Abb. 7. Energieniveaus von ungeraden Ba- und Ce-Isotopen; Zeichenerklärung wie in Abb. 2.

| Element                | Zustand             | $E_b$<br>(MeV) | $\Delta_b$<br>(MeV) | $\mu_b^{p-n}$<br>(MeV) | $v_b^2$ | $\lambda_n$<br>(MeV) |
|------------------------|---------------------|----------------|---------------------|------------------------|---------|----------------------|
| $^{93}_{53}\text{Zr}$  | 2 d <sub>5/2</sub>  | 2,05           | 1,93                | 0,57                   | 0,33    | - 8,91               |
|                        | 3 s <sub>1/2</sub>  | 2,77           | 0,81                | 0,24                   | 0,02    |                      |
|                        | 1 g <sub>7/2</sub>  | 4,05           | 2,48                | 0,74                   | 0,10    |                      |
|                        | 2 d <sub>3/2</sub>  | 4,03           | 1,38                | 0,41                   | 0,03    |                      |
|                        | 1 h <sub>11/2</sub> | 5,62           | - 2,83              | 0,84                   | 0,07    |                      |
| $^{97}_{55}\text{Mo}$  | 2 d <sub>5/2</sub>  | 2,16           | 2,16                | 0,67                   | 0,49    | - 8,27               |
|                        | 3 s <sub>1/2</sub>  | 2,20           | 0,90                | 0,28                   | 0,04    |                      |
|                        | 1 g <sub>7/2</sub>  | 3,75           | 2,77                | 0,86                   | 0,16    |                      |
|                        | 2 d <sub>3/2</sub>  | 3,48           | 1,54                | 0,48                   | 0,05    |                      |
|                        | 1 h <sub>11/2</sub> | 5,25           | - 3,16              | 0,98                   | 0,10    |                      |
| $^{129}_{52}\text{Te}$ | 2 d <sub>5/2</sub>  | 4,03           | 1,16                | 0,92                   | 0,98    | - 8,42               |
|                        | 1 g <sub>7/2</sub>  | 3,32           | 1,49                | 1,18                   | 0,95    |                      |
|                        | 3 s <sub>1/2</sub>  | 1,73           | 0,48                | 0,38                   | 0,98    |                      |
|                        | 2 d <sub>3/2</sub>  | 1,41           | 0,82                | 0,65                   | 0,90    |                      |
|                        | 1 h <sub>11/2</sub> | 1,80           | - 1,69              | 1,35                   | 0,67    |                      |
| $^{127}_{54}\text{Xe}$ | 2 d <sub>5/2</sub>  | 3,47           | 1,46                | 0,99                   | 0,95    | - 9,15               |
|                        | 1 g <sub>7/2</sub>  | 2,95           | 1,88                | 1,28                   | 0,88    |                      |
|                        | 3 s <sub>1/2</sub>  | 1,11           | 0,61                | 0,42                   | 0,92    |                      |
|                        | 2 d <sub>3/2</sub>  | 1,13           | 1,04                | 0,71                   | 0,69    |                      |
|                        | 1 h <sub>11/2</sub> | 2,15           | - 2,14              | 1,46                   | 0,48    |                      |
| $^{133}_{56}\text{Ba}$ | 2 d <sub>5/2</sub>  | 4,32           | 0,93                | 1,07                   | 0,99    | - 8,10               |
|                        | 1 g <sub>7/2</sub>  | 3,55           | 1,19                | 1,38                   | 0,97    |                      |
|                        | 3 s <sub>1/2</sub>  | 2,03           | 0,39                | 0,45                   | 0,99    |                      |
|                        | 2 d <sub>3/2</sub>  | 1,63           | 0,66                | 0,76                   | 0,96    |                      |
|                        | 1 h <sub>11/2</sub> | 1,68           | - 1,35              | 1,57                   | 0,79    |                      |
| $^{139}_{58}\text{Ce}$ | 2 d <sub>5/2</sub>  | 4,61           | 0,55                | 1,15                   | 1,00    | - 7,76               |
|                        | 1 g <sub>7/2</sub>  | 3,78           | 0,71                | 1,47                   | 0,99    |                      |
|                        | 3 s <sub>1/2</sub>  | 2,35           | 0,23                | 0,48                   | 1,00    |                      |
|                        | 2 d <sub>3/2</sub>  | 1,89           | 0,39                | 0,82                   | 0,99    |                      |
|                        | 1 h <sub>11/2</sub> | 1,58           | - 0,81              | 1,68                   | 0,93    |                      |

Tab. 3. Lösungen der gekoppelten BCS-Gleichungen für ungerade n-Kerne.

liegenden Zustände der ungeraden Xe- und Ba-Isotope im SDI-Modell in befriedigender Übereinstimmung mit dem Experiment erklärt werden können. Wie diese Abbildungen zeigen, ändern sich die relativen Abstände der  $(3^+/2, 11^-/2)$ - bzw.  $(1^+/2, 11^-/2)$ -Niveaus besonders stark bei Annäherung an eine magische Zahl. Dies läßt sich auf die dann auftretende Verminderung von Paareffekten zurückführen.

Der Vollständigkeit halber bringen wir in Tab. 2 und 3 die numerischen Lösungen der gekoppelten BCS-Gleichungen, für einige der von uns untersuchten Kerne ungerader Protonen- bzw. Neutronenzahl.

Schon in der Einleitung haben wir die wesentlichen Vorteile des hier verwendeten, gegenüber anderen Kernmodellen aufgezählt. Abschließend sei noch erwähnt, daß wir im Rahmen des SDI-Modells auch Konfigurationsmischungsrechnungen mit Hilfe der Quasiteilchen-Tamm-Dancoff-Methode durchgeführt haben. Die nötige Theorie dafür wurde in einer früheren Arbeit dargestellt<sup>20</sup>. Vorläufige Resultate dieser Berechnungen zeigen, daß die niedrigst liegenden Energieniveaus nur wenig, höher liegende Zustände aber oft bedeutend verschoben werden. Dies scheint auf die Berücksichtigung der 3-Quasiteilchenzustände, nach geeigneter Herausprojizierung der „spurious states“, zurückführbar zu sein. Eine detaillierte Untersuchung der damit zusammenhängenden Fragen muß allerdings einer künftigen Arbeit vorbehalten bleiben.

<sup>20</sup> E. REYA u. H. BAIER, Acta Phys. Austr., im Druck, und SGAE-PH-64/1968; siehe auch <sup>17</sup>.